PROBLEMAS CONCEPTUALES EN LA MEDICION DE LA DESIGUALDAD (*)

Javier Ruiz-Castillo
Universidad de Zaragoza

INTRODUCCION

No es necesario insistir aquí en el persistente interés de la opinión pública de cualquier país por la desigualdad existente en diversos ámbitos de la sociedad, ni en la importancia que conceden las distintas formaciones políticas a los objetivos en materia de distribución en la gran mayoría de las sociedades contemporáneas. En particular, en la esfera económica asistimos actualmente a la proliferación de estudios empíricos donde la valoración de los resultados del proceso económico o el impacto de medidas específicas, incluye la estimación del grado de desigualdad de la riqueza, la renta o el consumo.

La medición de la desigualdad a través de indicadores agregados, ha venido estimulada durante los últimos 15 años por las novedades experimentadas en dos direcciones complementarias: el desarrollo de una extensa literatura de fuerte contenido analítico —iniciada con las contribuciones de Atkinson (1970) y Kolm (1968, 1976)— que ha servido para clarificar las bases axiomáticas de todo intento de medición de conceptos tan cargados de connotaciones normativas; y la aparición creciente de potentes muestras con información microeconómica sobre la renta o el gasto y las características demográficas, geográficas y socioeconómicas de la población cuyos aspectos distributivos se desea investigar.

Las encuestas de Presupuestos familiares realizadas por el INE, constituyen una fuente de información extraordinaria sobre las condiciones de vida de los hogares españoles que está todavía por explotar para describir un fenómeno de tanto interés. Ahora bien, si nos preguntamos cómo orientar rigurosamente la medición de la desigualdad en nuestro país, la conclusión es que la literatura existente no proporciona una guía teórica inequívoca para el trabajo empírico. Por el contrario, tras 15 años de debate, subsisten serias ambigüedades conceptuales que es preciso desvelar antes de pasar al análisis de los datos disponibles.

La primera cuestión a dilucidar es *qué tipo de desigualdad deseamos medir y por qué.* En este orden de cosas, los problemas comienzan por la imposibilidad de observar di-

(*) Este artículo forma parte del trabajo preliminar realizado para la monografía *La medición de la pobreza y la desigualdad en España, 1980-81*, cuya elaboración fue financiada por el Banco de España.

rectamente la magnitud probablemente más interesante desde el punto de vista teórico; a saber, el bienestar económico individual. A lo que hay que añadir la aparición de resultados recientes que cuestionan seriamente la posibilidad de establecer una relación biunívoca entre la medición de la desigualdad de la renta (o el gasto total) y la medición de la desigualdad del bienestar asociado a esas variables escala.

En segundo lugar, revisaremos las dificultades derivadas de la *simbiosis entre los aspectos positivos y normativos que empaña todo intento de medir la desigualdad.* Así, en la literatura se distingue entre los índices «objetivos» tomados de la Estadística, que pretenden estimar la dispersión de una distribución en un sentido meramente descriptivo, y los llamados índices «éticos» o «normativos» que miden la desigualdad en términos del coste en el bienestar potencial que ésta ocasiona, de acuerdo con una función de bienestar social que incorpora abiertamente un conjunto de juicios de valor.

A este respecto, la cuestión a debate es la siguiente. Los iniciadores del enfoque normativo destacan que tras las medidas pretendidamente objetivas subyace algún concepto de bienestar social con implicaciones éticas que sería preferible explicitar al comienzo del análisis. Desde el polo opuesto se ha objetado que el intento de identificar «mayor desigualdad» con «menor bienestar social» choca con el hecho de que tanto la desigualdad como el bienestar social son nociones primitivas, difíciles de yuxtaponer por completo sin incurrir en cierta pérdida genuina de significado.

El tercer aspecto metodológico examinado en este artículo, arranca del hecho de que *diferentes indicadores de desigualdad pueden proporcionar ordenaciones distintas de las distribuciones que se desea comparar.* Pero entonces ¿con qué criterio seleccionaremos en la práctica las medidas a utilizar en el trabajo empírico? Ante esta dificultad fundamental, la literatura analítica ha seguido dos direcciones. Por un lado, dada una ordenación parcial de aceptación general —como pueda ser la inducida por el criterio de Lorenz— se ha buscado la caracterización de la clase de indicadores consistentes con ella. Por otro, se ha investigado axiomáticamente las propiedades que satisfacen las distintas medidas de desigualdad; propiedades de interés general, o propiedades de utilidad en determinadas aplicaciones concretas.

No hay inconveniente en reconocer de antemano que nuestro tratamiento de estos tres problemas responde al (loable) interés de abrir caminos operativos al análisis empírico de la desigualdad. Adelantando acontecimientos, nuestra posición se resume como sigue.

Primero, defenderemos el interés del estudio descriptivo de la desigualdad de magnitudes observables que aproximen adecuadamente lo que denominamos la posición económica de los individuos. *Segundo,* puesto que es posible mantener que al menos en los casos prácticos más relevantes equidad y bienestar son conceptos complementarios y libres de ambigüedad, abogaremos por el uso indistinto tanto de los índices objetivos como de los normativos. *Tercero,* en cuanto a la selección de los indicadores de desigualdad, parece obvio que para protegernos de las peores consecuencias de la lógica pretensión de ordenar todas las distribuciones en litigio, es conveniente trabajar con una batería de medidas. Pero en lugar de concluir que las discrepancias que puedan producirse son esencialmente arbitrarias, sostendremos que en cada situación concreta será siempre fructífero juzgar acuerdos y divergencias a la luz de las propiedades diferenciales de los indicadores que se utilicen.

Confiamos, sin embargo, que estas pragmáticas conclusiones quedarán suficientemente respaldadas a satisfacción del lector más exigente por la interpretación que ofreceremos de los resultados teóricos disponibles.

El resto de este trabajo se organiza en tres apartados donde se tratan sucesivamente los problemas metodológicos que se han planteado en esta Introducción. Por último, se incluye un Apéndice donde se resume de forma conveniente qué propiedades de las discutidas en el texto satisface un conjunto de índices de desigualdad frecuentemente utilizados en el trabajo empírico.

I. LA POSICION ECONOMICA DE LOS INDIVIDUOS

Resultará útil describir una medida de desigualdad, en el sentido más amplio posible, como una relación funcional I entre un conjunto *D* de estados sociales y un conjunto *R* de puntos susceptibles de comparación, ordenados por una relación binaria $\geqslant$ que supondremos reflexiva, transitiva y antisimétrica. Para cada estado social *x* en *D*, I extrae los aspectos relevantes del fenómeno que se pretende medir y los representa por el elemento $I(x)$ de *R*. De ahí que nos refiramos a índices *agregados* que subsumen en un solo punto toda la información contenida en un estado social por compleja que ésta sea. Por otra parte, dados dos estados *x* e *y* en *D* tales que $I(x) \geqslant I(y)$, la interpretación es que *x* exhibe al menos tanta desigualdad como *y* (1).

No cabe duda que, desde el punto de vista intuitivo, es conveniente que la función I proporcione una representación *escalar* del nivel de desigualdad con independencia del grado de cardinalidad que se le adscriba. De hecho, la totalidad de los índices a que hagamos referencia tienen como rango el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, ordenados por la relación habitual «mayor o igual que» $\geqslant$ (2).

Nuestro primer problema es la interpretación que debamos otorgar al dominio de definición de un índice agregado de desigualdad. En este sentido, haciendo abstracción de las complicaciones prácticas que plantea la noción de «individuo», la especificación de lo que entendemos por un estado social para una población de tamaño dado equivale a especificar la naturaleza de la desigualdad que deseamos medir.

Por un lado, es evidente que existen muchas situaciones en que el estudio de la desigualdad reclama un tratamiento multidimensional. Sin embargo, con excepción de los trabajos pioneros de Kolm (1973, 1977) y Atkinson y Bourguignon (1982, 1983) en el campo de la medición de la desigualdad en varias dimensiones, el grueso de la literatura analítica y empírica se ha concentrado en el caso unidimensional.

Por otra parte, desde el punto de vista teórico puede defenderse que, idealmente, estamos interesados en la distribución del bienestar individual. Así pues, aceptando la simplificación de reducirnos a una sola dimensión, podemos identificar un estado social de una población de *n* habitantes con la distribución $u = (u_1, \ldots, u_n)$, donde $u_i = U_i(q_i)$ es el nivel de utilidad que el individuo *i* obtiene del consumo del vector de bienes q_i. *El problema, naturalmente, es que como la utilidad no es directamente medible, en muchas situaciones prácticas no podremos contar con la distribución deseada.*

Si designamos por $g_i(p, x_i)$ el sistema de funciones de demanda marshalianas del individuo *i*, que depende del vector de precios *p* y de la renta (o el gasto) x_i, la función de utilidad indirecta de ese consumidor será:

$$u = U_i[g_i(p, x_i)] = v_i(p, x_i)$$

Dados los precios, bajo supuestos muy débiles sobre las preferencias individuales subyacentes, la variable escala x_i constituye un buen indicador de la utilidad en la medida que

$$x_i^1 \geqslant x_i^2 \Longleftrightarrow v_i(p, x_i^1) \geqslant v_i(p, x_i^2)$$

Por consiguiente, no es de extrañar que tanto en la literatura teórica como en la empírica se haya pensando solventar el problema concentrándose en el estudio de la distribución de una variable observable como la renta o el gasto.

Desgraciadamente, Zubiri (1985*a*) ha puesto de manifiesto recientemente que existen

---

(1) La antisimetría de $\geqslant$ implica que si $I(x) \geqslant I(y)$ y $I(y) \geqslant I(x)$, entonces $x = y$; *es decir, dos estados sociales con la misma desigualdad vienen representados por el mismo elemento de R.*

(2) El hecho de que la relación $\geqslant$, además de reflexiva, transitiva y antisimétrica sea también completa, no debe prejuzgar la cuestión de si debemos o no restringirnos a una ordenación parcial de los estados sociales en lo que atañe a la desigualdad. Volveremos definitivamente sobre este punto en el tercer apartado de este artículo.

dificultades de orden fundamental que dan al traste con la creencia de que la desigualdad, digamos, de la renta, es un buen indicador de la desigualdad en el bienestar económico, en el sentido que si una medida redistributiva consigue reducir la desigualdad observada de la renta podamos estar seguros que ha disminuido también la desigualdad de la utilidad indirecta de los individuos que la detentan.

Formalmente, la pregunta que se hace Zubiri es bajo qué condiciones existe un par de índices de desigualdad I^1 e I^2 (no necesariamente distintos) que posean una serie de propiedades mínimas, y que para cada par de distribuciones x e y verifiquen que

$$I^1(x) \geq I^1(y) \Longleftrightarrow I^2[u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)] \geq \geq I^2[u_1(y_1), \ldots, u_n(y_n)]$$

para todas las funciones de utilidad u_i que pertenezcan a un conjunto Λ de funciones admisibles.

Los resultados son muy negativos: cuando los individuos tienen funciones de utilidad diferentes o cuando éstas, aun siendo iguales, son medibles en una escala ordinal, la desigualdad de la renta es *siempre* un mal predictor de la desigualdad de los niveles de utilidad. Si admitimos grados más fuertes de cardinalidad, a menos que conozcamos con mucho detalle la función de utilidad común a todos los individuos, no podemos estar seguros de que la reducción de la desigualdad de la renta implique también la disminución de la desigualdad de la utilidad indirecta de la misma. En cuyo caso, sería preferible aplicar directamente una medida de desigualdad a la distribución de utilidades sin preocuparnos por la desigualdad de las rentas.

Las dificultades para establecer en todos los casos una relación biunívoca entre la desigualdad medida en el espacio de la renta o el gasto y el de la utilidad indirecta que esas magnitudes generan, obliga sin duda a una reconsideración de la justificación última de ocuparse de la distribución de alguna de esas variables observables. *Nuestra reacción pragmática es que no hay inconveniente en defender el innegable interés sustantivo de circunscribirse al estudio descriptivo de la desigualdad en términos de magnitudes que aproximen adecuadamente lo que podríamos denominar la «posición económica» de los individuos.* La idea central es que, dados los precios de los bienes, la renta o el gasto resumen de forma operativa e inequívoca el conjunto de posibilidades al que los individuos vienen constreñidos.

De hecho, esta es la posición mantenida por Deaton y Muellbauer (1980) cuando sostienen que socialmente lo que nos interesa en última instancia son las *restricciones objetivas* que cada consumidor confronta. En consecuencia, frente a las objeciones del individualismo ordinal más radical representado por Arrow (1977), que insiste en que todo intento de comparación interpersonal entraña una negación de la individualidad intrínseca del agente humano, Deaton y Muellbauer defienden la validez de establecer tales comparaciones a través de la renta o el gasto total, convenientemente deflactados por las llamadas escalas de equivalencia que toman en cuenta las diferencias en el tamaño y la composición del hogar u otras características que se consideren socialmente relevantes. De manera que si hubiera diferencias en las preferencias individuales que no pudieran ser adscritas a las diferencias en un conjunto de características observables, «cabría ... rechazar las comparaciones basadas en los niveles de bienestar individual en favor de las comparaciones basadas en la variable escala que determina la dimensión de los conjuntos presupuestarios».

Así pues, de aquí en adelante el elemento típico del dominio de cualquier índice de desigualdad será un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *donde* x_i es la renta del individuo i. Si especificamos además que existe una cantidad positiva de renta a distribuir y que los individuos sólo pueden recibir cantidades no-negativas de renta, tendremos que el dominio será

$$D^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i > 0 \quad \text{y} \quad x_i \geqq 0 \quad \text{para todo } i \right\}$$

donde $\mathbb{R}^n$ es el espacio Euclidiano n-dimensional. Para acomodar el caso en que se comparen poblaciones de distinto tamaño, definiremos el conjunto

$$D = \bigcup_{n=2}^{\infty} D^n.$$

II. INDICES NORMATIVOS *VERSUS* INDICES OBJETIVOS

Desde sus inicios a finales del siglo XIX hasta hace relativamente poco tiempo, el estudio de la desigualdad de la renta se limitó a la estimación de un conjunto de indicadores tomados de la Estadística, como el coeficiente de variación, la varianza de los logaritmos, la desviación relativa de la media o el índice de Gini. En 1970, Atkinson arguyó que tras la utilización de estos índices «objetivos» de desigualdad, se ocultaban necesariamente juicios de valor que sería mejor desvelar directamente en términos de una función de bienestar social que incorporara explícitamente las propiedades normativas que se considerasen deseables. De este modo, retomaba la sugerencia formulada por Dalton (1920) cinco décadas antes.

Designemos por $W: D^n \rightarrow \mathbb{R}$ la *función de bienestar social* (FBS de aquí en adelante) que asocia a cada distribución de la renta un número real representativo de las preferencias sociales al respecto. Si recordamos que, dados los precios, cada elemento x_i de un vector x en D^n constituye simplemente una medida escalar conveniente del conjunto presupuestario del individuo *i*, será útil interpretar W con Deaton y Muellbauer (1980) como una función que proporciona una agregación ponderada de los conjuntos de oportunidad individuales.

Como es sabido, a diferencia de Dalton, Atkinson (1970) propuso expresar los índices de desigualdad en el espacio de las rentas. Para ello, es preciso definir el concepto de *renta equivalente* x^*, que es el nivel de renta *per capita* que si se asignara a todos los individuos de la población permitiría alcanzar el nivel de bienestar de la distribución actual x. Si designamos por e_n el vector n-dimensional cuyos elementos son la unidad, x^* vendrá dado implícitamente por

$$W(x^* e_n) = W(x). \qquad [1]$$

Suponiendo, por el momento, que la expresión [1] tiene siempre solución, podemos escribir $x^* = \theta(x)$.

Si designamos por $\mu(x)$ la media de la distribución, de acuerdo con Atkinson (1970), Kolm (1969, 1976) y Sen (1973) el índice normativo de desigualdad $I_{AKS}: D^n \rightarrow \mathbb{R}$, correspondiente a la FBS W, se define por

$$I_{AKS}(x) = 1 - \theta(x)/\mu(x). \qquad [2]$$

Obsérvese que el índice obtenido por lo que denominaremos el procedimiento AKS tiene un significado numérico preciso. La expresión [2] nos da *el porcentaje de la renta total que se podría ahorrar, manteniendo el mismo nivel de bienestar social, si la renta estuviera igualitariamente distribuida*. Por lo demás, el índice I_{AKS} posee la propiedad de ser éticamente significativo en el sentido de que para todo par de distribuciones x e y en D^n,

$$I(x) \leqq I(y) \quad \text{si y sólo si} \quad W(x) \geqq W(y).$$

Así pues, para generar índices normativos de interés, basta especificar distintas FBS que satisfagan propiedades éticamente deseables. Desde luego, en la medida que la estimación de la desigualdad de una distribución dada depende de la FBS que se utilice, queda clara la íntima conexión entre medición y valoración ética propias de este enfoque. Tal conexión, precisamente, ha despertado distintas objeciones que es preciso revisar.

1. La crítica de Esteban.

En primer lugar, Esteban (1976*a*, 1976*b*) ha demostrado que, en determinadas condiciones generales, no existe una relación biunívoca entre funciones de bienestar social y medidas de desigualdad.

El planteamiento es el siguiente. Convengamos en que una función $I: D^n \rightarrow \mathbb{R}$ puede considerarse un índice de desigualdad si satisface ciertas propiedades mínimas. Acotada la noción de un índice de desigualdad aceptable, Esteban propone un concepto débil de consistencia entre una FBS y una medida de desigualdad: diremos que una FBS es consistente con un determinado índice de desigualdad siempre que, para distribuciones con la misma renta media, ambos se muevan en direcciones opuestas y, para distribuciones con la misma desigualdad, la renta media y el nivel de bienestar varíen en la misma dirección.

El resultado central es el siguiente: 1.º) Dada una FBS, siempre es posible encontrar dos índices de desigualdad I_1 e I_2 consistentes con ella que no son ordinalmente equivalentes, es decir, siempre existirán dos distribuciones x e y tales que $I_1(x) > I_1(y)$ pero $I_2(x) < I_2(y)$. 2.º) Dada una medida de desigualdad, siempre es posible encontrar dos funciones de bienestar social consistentes con ella que no son, a su vez, ordinalmente equivalentes.

En palabras de Esteban, «La conclusión que se extrae es que los conceptos de bienestar y desigualdad son sustitutivos y no complementarios ... Si la guía de acción es la justicia, la medida de desigualdad es precisamente la expresión de lo que se considera como justo y la idea de bienestar social se desvanece, excepto para casos triviales (cuando la desigualdad y la renta media se mueven en direcciones opuestas). Sin embargo, si la guía de acción es "bienestarista", es decir, si se considera que los sacrificios impuestos a unos se compensan por una mayor suma de ventajas disfrutadas por otros, la idea de justicia no sólo es redundante, sino que es inidentificable.»

No obstante, la posibilidad de obtener índices de desigualdad éticamente significativos a través del procedimiento AKS aplicado directamente a una FBS de determinadas características, hace concebir esperanzas. Si bien los resultados de Esteban son correctos y preocupantes, sus conclusiones —al menos para nuestros propósitos— no tienen por qué ser tan demoledoras.

Como veremos a continuación, Blackorby y Donaldson (1978) muestran que, *a)* si aceptamos un procedimiento general para obtener índices de desigualdad normativos y para racionalizar medidas específicas de desigualdad en términos de funciones de bienestar social, y *b)* nos constreñimos a casos que, aun siendo especiales, son de la máxima importancia empírica, entonces es posible establecer un puente satisfactorio entre bienestar y desigualdad que escapa, en el sentido que indicaremos posteriormente, a las dificultades descubiertas por Esteban.

Comencemos por una FBS W: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sea continua, S-cóncava (3), y creciente a lo largo de rayos desde el origen (4). Bajo estos supuestos, Blackorby y Donaldson demuestran que, para cada nivel de bienestar de referencia w, es posible obtener un índice relativo (5) de desigualdad —que designaremos por I_{BD}— continuo en (w, x) y S-convexo en x. Pero si, además, W es homotética, entonces I_{BD} es independiente del nivel de bienestar de referencia y coincide con I_{AKS}. Luego el procedimiento sugerido por estos autores nos permite asociar con cada FBS homotética un solo indice relativo de desigualdad que resulta ser éticamente significativo.

A continuación, cabe preguntarse si es posible partir de cualquier índice relativo y obtener una FBS que lo racionalice de una manera consistente. Blackorby y Donaldson establecieron que si I^r es un índice de desigualdad continuo en (w, x), homogéneo de grado 0 en x y S-convexo, entonces existe una familia de FBS continuas, crecientes a lo largo de rayos desde el origen y S-cóncavas, que tienen a I^r como el índice de desigualdad I_{BD} obtenido por el procedimento anteriormente descrito.

El problema es que las FBS asociadas con I^r no tienen por qué ser ordinalmente equivalentes. Ahora bien, si el índice de partida es independiente de un nivel de bienestar de referencia, como suele ser el caso en la práctica, entonces los miembros de la familia de FBS que lo racionalizan son homotéticas y ordinalmente equivalentes. En tales casos, el nexo entre FBS e índices de desigualdad es inmediato:

$$W(x) = \mu(x)\,[1 - I^r(x)]. \qquad [3]$$

Por consiguiente, es trivial recuperar la FBS que, según este procedimiento, está detrás

(3) Una matriz cuadrada se dice que es bioestocástica si todos sus elementos son no-negativos y cada una de sus filas y columnas suman la unidad. Pues bien, se dice que W es S-cóncava en $\mathbb{R}^n$ si para cualquier x en $\mathbb{R}^n$ y para todas las matrices biestocásticas de orden n, $W(Qx) \geq W(x)$.

(4) Es decir, $W(\lambda x) > W(x)$ para todo $\lambda > 1$ y $x > 0$.

(5) Se dice que un índice I es un índice *relativo* de desigualdad si para todo x e y tales que $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$, $I(x) = I(y)$. En ese caso, el grado de desigualdad es independiente de la media de la distribución.

de los índices objetivos tradicionales o de los índices de la familia de Theil —lo cual nos permitirá estudiar en el apartado siguiente si estos índices satisfacen ciertas propiedades normativas que, al referirse a la curvatura de los conjuntos de indiferencia social no son evidentes por inspección de su definición original—.

Para entender la compatibilidad entre esta posibilidad y los resultados de Esteban, tomemos el ejemplo en que I^r sea el índice de Gini. La expresión [3] nos proporciona la FBS que lo racionaliza en el sentido de Blackorby y Donaldson. Por otra parte, siempre existirá otra FBS consistente en el sentido de Esteban con el índice en cuestión, que no será ordinalmente equivalente a la función definida por la expresión [3]. Pero el índice de desigualdad obtenido por el procedimiento de Blackorby y Donaldson a partir de esta segunda FBS *no* será ya el índice de Gini.

2. La crítica de Sen y Hansson.

Existe acuerdo general en que la desigualdad es una noción valorativa que, junto a su significado puramente descriptivo, incorpora necesariamente aspectos normativos basados en última instancia en juicios de valor sobre lo que entendamos por equidad. En opinión de Sen (1973, 1978) y Hansson (1977), esta dualidad tiene consecuencias paradójicas inaceptables en el enfoque normativo.

La idea central es que las afirmaciones «no existe una pérdida de bienestar social» y «no hay desigualdad» se refieren a nociones primitivas muy diferentes, de manera que el intento de identificarlas puede conducir a contradicciones entre la ordenación de las distribuciones de renta de acuerdo con un índice normativo y la desigualdad del bienestar individual.

Para ilustrar el problema, se hace referencia a la familia de índices de Atkinson

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} (1/n)\,(x_i/\mu)^{1-\alpha} \right]^{(1/1-\alpha)} & \alpha > 0,\ \alpha \neq 1 \\ 1 - \prod_{i=1}^{n} (x_i/\mu)^{1/n} & \alpha = 1, \end{cases}$$

obtenida por el procedimiento AKS a partir de una FBS aditivamente separable

$$W_\alpha(x) = \sum_{i=2}^{n} V_\alpha(x_i), \qquad \text{donde} \qquad V_\alpha(x_i) = (1/1-\alpha)\,(x_i)^{1-\alpha}.$$

A medida que aumenta el parámetro α de aversión a la desigualdad se concede más peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución y menos a las transferencias en el extremo superior. Con lo que la desigualdad de una distribución dada de acuerdo con el índice de Atkinson también aumenta.

Sin embargo, la curvatura de la función V_α evoluciona de manera que la desigualdad del vector $v_\alpha = [V_\alpha(x_1), ..., V_\alpha(x_n)]$, medida por cualquier índice objetivo, tiende a disminuir. Esto se interpreta, erróneamente en nuesta opinión, como una contradicción: mientras que la medida ética de la desigualdad de la renta aumenta, la desigualdad de los niveles de utilidad individual disminuye.

Como se recordará, a lo largo de este artículo hemos distinguido cuidadosamente entre el objetivo de medir la desigualdad de una distribución de la renta $x = (x_1, ..., x_n)$, y el objetivo de medir la desigualdad del bienestar individual en el espacio de las utilidades $[U_1(x_1), ..., U_n(x_n)]$. En el contexto de FBS aditivamente separables como las consideradas por Atkinson, la función $V(x_i)$ no debe interpretarse como la función de utilidad común a todos los individuos, sino como una función de *valoración social* de las rentas individuales que aproximan en el espacio unidimensional la posición económica de los agentes (6).

Desde esta perspectiva, no vemos contradicción en la secuencia que afirma: a mayor aversión social a la desigualdad (es decir, a mayor α), menor valoración social de cada

(6) Esta confusión entre utilidad individual y valoración social de la renta ha conducido a Zubiri (1985*b)* a dar un paso más en el argumento, formulando la siguiente sugerencia tras cuyo candor se oculta, obviamente, una desautorización completa de la posición de Atkinson: si conocemos las utilidades individuales $V_\alpha(x_i)$, *midamos* directamente la desigualdad del vector v_α, *y prescindamos* de calcular el índice de Atkinson en el espacio de las rentas. En éste y otros aspectos, la revisión de la literatura que realiza Zubiri contiene puntos de vista muy distintos de los que aquí se defienden.

renta individual $V(x_i)$, y, por consiguiente, menos bienestar social agregado

$$\sum_i V(x_i)$$

y mayor pérdida social que se traduce en menor renta equivalente y mayor desigualdad a través de un índice normativo.

La conclusión de este apartado es que, *si equidad y bienestar resultan ser conceptos complementarios y libres de contradicción (al menos en los casos de interés práctico que hemos destacado en el contexto de Blackorby y Donaldson), las ambigüedades que rodean la cuantificación de la desigualdad afectan por igual a todo tipo de indicador agregado.* Razón por la cual podemos sentirnos libres de emplear medidas objetivas o normativas, sin posibilidad de discriminar entre ellas en función de las dificultades comentadas.

III. CRITERIOS OPERATIVOS PARA SELECCIONAR INDICADORES DE DESIGUALDAD

Entre otros, Sen (1973, 1978) ha mostrado sus reservas ante las medidas de desigualdad que proporcionan una ordenación completa de todas las distribuciones posibles. En su opinión, «la noción de desigualdad no tiene ninguna propiedad innata de "completitud" ... el concepto de desigualdad tiene numerosas facetas que pueden apuntar en direcciones distintas, de manera que en ocasiones no podemos esperar que emerja una ordenación completa».

La combinación de esta posición con la defensa del criterio de Lorenz, conduce a una situación en la que sólo sería legítimo comparar distribuciones cuyas curvas de Lorenz no tengan ninguna intersección. Lo exiguo del conjunto de distribuciones a que nos veríamos reducidos en la práctica si siguiéramos este punto de vista, ha llevado a que las investigaciones empíricas abandonen una postura tan cautelosa. Por otra parte, como indica, por ejemplo, Esteban (1976*b*), «un concepto bien definido de lo que es justo debería permitirnos ordenar todas las distribuciones de renta concebibles».

Así pues, en nuestra opinión, para que el paso que hemos dado al aceptar la comparabilidad de las posiciones económicas de los individuos resulte rentable, creemos que *al menos desde el punto de vista informativo no hay inconveniente en pretender una ordenación completa de todas las distribuciones posibles.* El problema, por supuesto, es que se ha observado repetidas veces que medidas distintas pueden dar lugar a ordenaciones diferentes.

Esta situación reclama, como mínimo, investigar la robustez de nuestras conclusiones empíricas a la luz de distintas medidas de desigualdad. Pero en lugar de concluir que las discrepancias que puedan producirse son esencialmente arbitrarias y que debemos limitarnos a las zonas de acuerdo, entendemos que *es razonable examinar los resultados en cada situación concreta teniendo en cuenta las propiedades diferenciales de las medidas que se utilicen, en la convicción de que es posible aprender tanto en los casos robustos como en aquellos en que medidas de características distintas no concuerden.*

Dentro de este planteamiento general, será instructivo revisar qué propiedades se han estudiado en la literatura. Entre éstas, podemos distinguir, 1) aquellas que sirven para caracterizar el conjunto de medidas consistentes con el criterio de Lorenz; 2) otras propiedades ordinales de índole normativa, y 3) la propiedad cardinal de la descomponibilidad.

1. Las medidas consistentes con el criterio de Lorenz.

Dadas dos distribuciones x e y en D, decimos que x domina en el sentido de Lorenz a y si y sólo si $L_x(s) \leqq L_y(s)$ para todo $s \in [0, 1]$, donde L_x y L_y son las curvas de Lorenz asociadas a x e y, respectivamente. En ese caso escribimos $x \geqslant_L y$. Decimos que un índice de desigualdad I es consistente con el criterio de Lorenz, si para todas las distribuciones x e y en D, $x \geqslant_L y$ implica que $I(x) \leqq I(y)$.

Una de las aportaciones más notables del enfoque moderno a la medición de la desigualdad ha sido la caracterización de la clase de funciones que cumplen esta propiedad: un índice de desigualdad es consistente con el criterio de Lorenz si y sólo si satisface las siguientes condiciones que enunciamos informalmente (7):

i) Si x se puede obtener de y a través de una secuencia finita de transferencias de renta desde un individuo a otro más pobre, entonces $I(x) < I(y)$. Este es el llamado *Principio de transferencias de Pigou-Dalton* de claro valor normativo.

ii) Si x es una mera permutación de y, entonces $I(x) = I(y)$. Esta es una condición de *simetría o anonimidad* éticamente aceptable siempre que los individuos de la población tengan necesidades comparables.

iii) Dada cualquier distribución x en D^n, si en la distribución y en D^{rn} tenemos que $y_i = y_{2i} = ... = y_{ri} = x_i$ para todo $i = 1, ..., n$ y r es un número entero (es decir, si y es una réplica de orden r de la distribución original), entonces $I(x) = I(y)$ Este es el *Principio de la población de Dalton* que nos permite comparar distribuciones para una población de distinto tamaño y la misma renta media y que se considera generalmente aceptable (8).

iv) I es un índice relativo de desigualdad. Que la desigualdad de una distribución sea independiente de la media no es una condición cuyo atractivo ético resulte obvio: muchas personas no estarán de acuerdo con que un aumento proporcional de todas las rentas deje inalterada la desigualdad. Sin embargo, Atkinson (1970) entre otros muchos, defiende la utilización de índices relativos para circunscribir la medición de la desigualdad al perfil de las distribuciones, con independencia de desplazamientos equiproporcionales de las mismas.

Como se indica en el Apéndice, muchas de las medidas que se utilizan en la práctica satisfacen estas cuatros propiedades. En consecuencia, para diferenciarlas es preciso traer a colación otras propiedades de interés.

(7) Para una demostración formal de este resultado véase, por ejemplo, Foster (1985).

(8) Véase, sin embargo, las reservas de Cowell (1977) al respecto.

2. Dos propiedades normativas.

Parece claro que, desde el punto de vista normativo, será preferible utilizar aquellas medidas que conceden un mayor peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución. Esta propiedad admite dos formulaciones alternativas que han considerado, entre otros, Atkinson (1970) y Kolm (1976*b*).

Denotemos por $T(x_t, x_s)$ el impacto sobre el valor de un índice I de una transferencia infinitesimal desde el individuo t al s, y supongamos que las rentas de cuatro individuos x_i, x_j, x_k y x_1 guardan la siguiente relación:

(i) $x_i<x_j$; (ii) $x_k<x_1$; (iii) $x_i<x_k$, $x_j<x_1$, y (iv) $x_j-x_i=x_1-x_k$.

Diremos que I satisface el *Principio del decrecimiento del impacto ante transferencias* si $T(x_j, x_i) > T(x_1, x_k)$ (9).

La segunda propiedad normativa que debemos investigar, fue acuñada por Blackorby y Donaldson (1978) y se refiere a la curvatura de los conjuntos de indiferencia social a distintos niveles de desigualdad, manteniendo la renta total constante. Tomemos el caso de tres individuos y centremos nuestra atención en el simplex, definido por la condición $x_1 + x_2 + x_3 = 3x^*$ como se ilustra en la figura 1.

A partir de cualquier distribución como la S, todos los puntos comprendidos en el hexágono irregular SABCDE deben ser preferidos a S de acuerdo con cualquier FBS que sea S-cóncava. Se trata del conjunto de distribuciones superiores en el sentido de Lorenz a la distribución S de partida. Ahora bien, aunque todos los vértices deben ser indiferentes desde el punto de vista de cualquier FBS con esa propiedad, es evidente que las superficies de indiferencia proyectadas en el simplex variarán de una a otra FBS. Así, en el caso límite de una FBS rawlsiana que sólo presta atención al individuo con menor renta, todos los puntos en el interior del triángulo

(9) Un concepto aún más equitativo exigirá que, en las condiciones anteriores, $T(x_j, x_i) > T(x_1, x_k)$ cuando, en lugar de la condición (iv), tengamos (iv') $x_j/x_i = x_1/x_k$. En este caso, diremos que la medida de desigualdad I satisface el *Principio del decrecimiento relativo del impacto ante transferencias*.

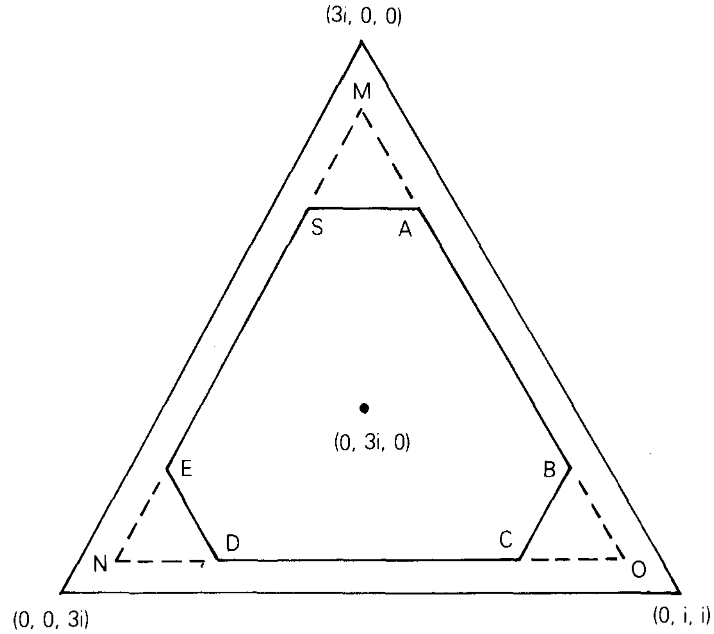

FIGURA 1

MNO serán preferidos a S, puesto que suponen una mejora para el individuo en peor situación. Pero para otras FBS los conjuntos de indiferencia serán más redondeados.

Distinguiremos dos tipos de funciones: aquellas para las que las proyecciones de los conjuntos de indiferencia sobre el simplex a niveles cada vez menores de bienestar social, son concéntricas respecto de la distribución igualitaria —como en los casos (a) y (b) de la figura 2— y aquellas para las que tales proyecciones van adoptando una forma más y más triangular, como en los restantes casos de esta figura.

Blackorby y Donaldson se refieren a la clase de FBS con la primera característica como *distributivamente homotéticas*. Se trata de una propiedad muy poco recomendable que implica que el tratamiento de los individuos a distintos niveles de renta es independiente del grado de desigualdad que exhiba la distribución. Pues bien, los casos (a) y (b) corresponden, respectivamente, a la FBS del coeficiente de Gini y del coeficiente de variación obtenidas por el procedimiento de Blackorby y Donaldson. Por otra parte, las situaciones (c) a (f) corresponden, respectivamente, a la FBS de la familia de índices de Theil para $c = 1$ y los miembros de la familia de índices relativos de Atkinson A_α para $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$. Se observará que, en estos casos, a medida que el nivel de bienestar disminuye y por tanto la desigualdad de la distribución aumenta, las FBS mencionadas se hacen —en distinto grado— más y más rawlsianas, concediendo mayor peso al individuo en peor situación.

3. **Indices descomponibles.**

Si dos grupos de la población que tienen el mismo grado de desigualdad se unen para formar un único colectivo, es de esperar que la desigualdad en la unión no sea la misma que en los grupos ordinarios por separado. La razón es que la mayor heterogeneidad de la nueva población dará lugar, en general, a una nueva fuente de desigualdad.

En consecuencia, en muchas ocasiones es importante intentar cuantificar en qué medida la desigualdad de la población total puede ser atribuida a diferencias en la renta entre subgrupos de la población. Piénsese, por

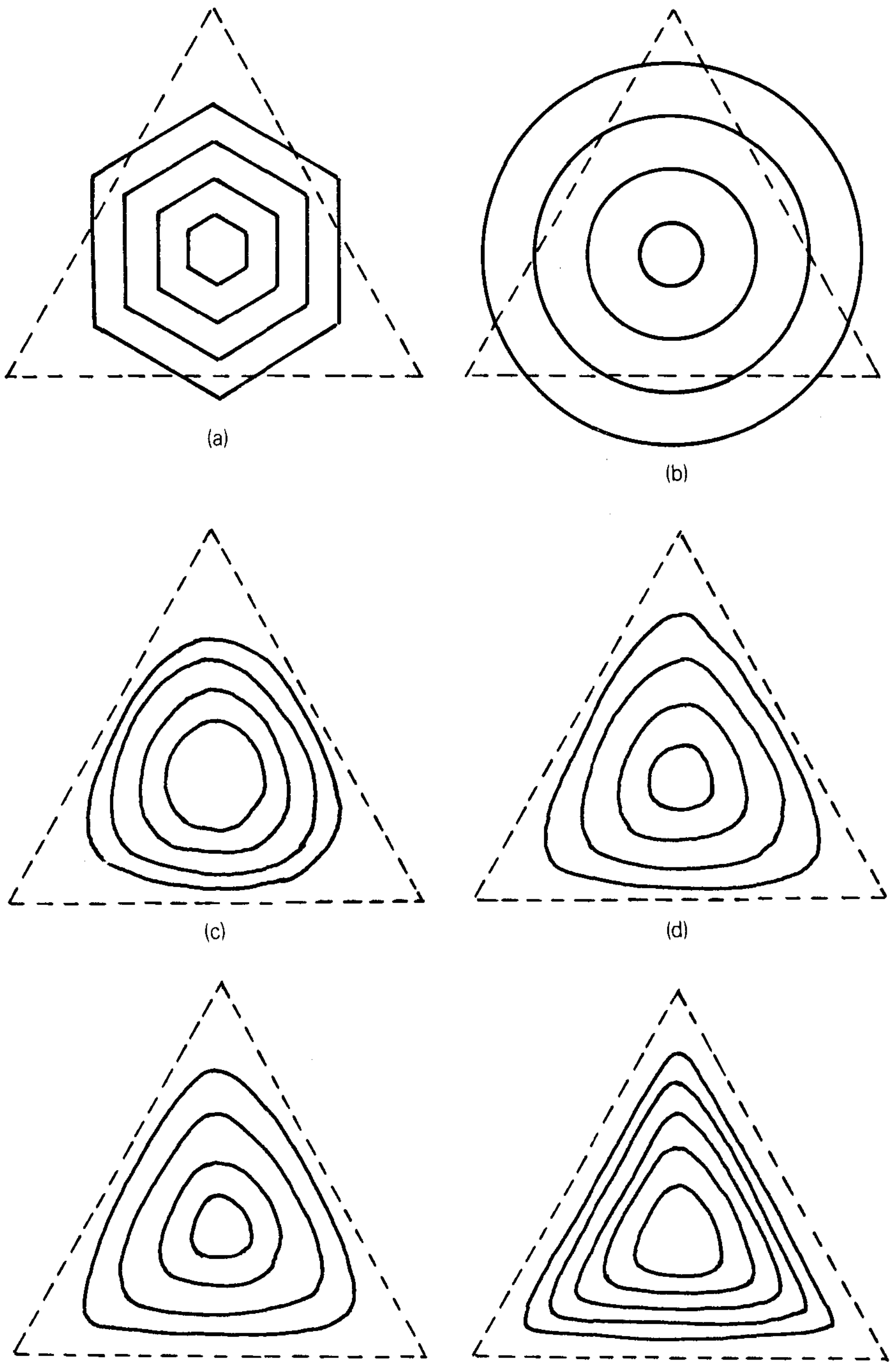

FIGURA 2

ejemplo, en el interés de estimar la importancia de la desigualdad originada en las variaciones de la renta asociadas con la Comunidad Autónoma de residencia. Para ello, es esencial que la desigualdad total pueda expresarse como la suma de dos términos que reflejen las dos fuentes de desigualdad relevantes: la que exista *dentro* de cada miembro de la participación que se considere, que designaremos por I_W; y la que se genera residualmente por las diferencias de renta *entre* los subgrupos que denominaremos I_B.

Supongamos que una población de n individuos se particiona en m subgrupos disjuntos, y designemos por $x = (x^1, ..., x^m)$ la distribución objeto de estudio, donde $x^j = (x_1^j, ..., x_{n_j}^j)$ es la distribución de la renta en el subgrupo j consistente en n_j individuos. El concepto más útil de descomponibilidad se debe a Shorrocks (1980): se dice que el índice de desigualdad $I: D_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es *aditivamente descomponible* si existe un conjunto de coeficientes w^j, $j = 1, ..., m$, que dependen sólo de los vectores $\mu = (\mu^1, ..., \mu^m)$ y $n = (n_1, ..., n_m)$ tales que

$$I(x) = I_W(x) + I_B(x) = \sum_{j=1}^{m} w^j(\mu, n)\, I(x^j) + I(\mu^1 e_{n_1}, ..., \mu^m e_{n_m}).$$

El término I_W es una suma ponderada de la desigualdad observada en cada uno de los subgrupos; mientras que el término I_B, que recoge la desigualdad atribuible a las diferencias entre los miembros de la partición, responde a un experimento conceptual en que la desigualdad existente entre los individuos de cada subgrupo se elimina asignando a cada individuo la renta media del grupo a que pertenece.

Es evidente que la expresión anterior sólo se mantiene invariable para los índices que midan la desigualdad en una escala cociente. Por tanto, la utilización de índices descomponibles entraña aceptar que la medición de la desigualdad admite el máximo grado de cardinalidad. En todo caso, la descomponibilidad aditiva impone fuertes restricciones adicionales. El resultado fundamental, debido también a Shorrocks, es el siguiente:

Teorema. Sea $I: D_+ \rightarrow \mathbb{R}$ un índice relativo de desigualdad que satisfaga el principio de transferencias de Pigou-Dalton, y que sea continuo, simétrico, con segundas derivadas continuas, no negativo para todo x e igual a cero sólo si x corresponde al reparto igualitario. Entonces I es aditivamente descomponible si y sólo si es un múltiplo positivo de alguno de los miembros de la familia de índices de Theil T_c: $D^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$T_c(x) = \begin{cases} (1/n)\,[1/c\,(c-1)] \sum_{i=1}^{n} [(x_i/\mu)^c - 1] & c \neq 0, 1 \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} (x_i/\mu) \ln (x_i/\mu) & c = 1 \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} \ln (\mu/x_i) = \ln (\mu/\mu^*) & c = 0. \end{cases}$$

En ese caso,

$$w^j(\mu, n) = (n^j/n)(\mu^j/\mu)^c = (n^j/n)^{1-c}(s^j)^c \qquad j = 1, ..., m,$$

donde s^j es la proporción que supone la renta total del subgrupo j sobre la renta total de la población en su conjunto.

Así pues, *si deseamos utilizar una medida relativa de desigualdad que sea «suave» y aditivamente descomponible, estamos obligados a elegir entre los miembros de T* (10). Dada la constancia del término I_B, las diferencias en la descomposición para cada valor de c se manifestarán a través de I_W que recoje la desigualdad atribuible dentro de los subgrupos de la participación. En este sentido, debemos estudiar las implicaciones de adoptar distintos valores del parámetro c sobre los coeficientes de ponderación w^j.

En primer lugar, merece la pena que nos detengamos en los juicios de valor implícitos en esta decisión:

a) Si $c = 0$, $w^j = n^j/n$, de manera que entre dos comunidades con la misma desigualdad según el indicador T_0, pero con distinta población, la contribución a la desigualdad global será mayor para la que esté relativamente más poblada.

(10) Recientemente, Shorrocks (1984) ha investigado una propiedd más débil de descomponibilidad o agregatividad. Sin embargo, las únicas medidas continuas de desigualdad relativa que satisfacen esta nueva condición son, de nuevo, los miembros de la familia de índices de Theil o sus transformaciones monótonas crecientes.

b) Si $c = 1$, $w^i = s^i$. Luego si dos comunidades tienen la misma desigualdad según el índice T_1, la que sea relativamente más rica recibirá un peso mayor.

c) Si $c < 0$, la contribución de cada comunidad a la desigualdad global será tanto mayor cuanto más poblada esté y cuanto más pobre sea. Si $c > 0$, estaremos en el caso contrario.

En segundo lugar, obsérvese que para c distinto de 0 ó 1, los coeficientes w^i no sumarán la unidad, de manera que la contribución a la desigualdad del término I_w no será una media ponderada de la desigualdad medida dentro de cada uno de los subgrupos. Aparte de las dificultades obvias de interpretación a la hora de establecer la contribución porcentual a la desigualdad global de cada uno de los subgrupos de la partición, lo más grave de estos casos es que puede demostrarse que

$$1 - \sum_i w^i$$

es proporcional al término I_B lo que da lugar a posibles ambigüedades que se examinan a continuación.

Las medidas de desigualdad descomponibles se utilizan para cuantificar la contribución de un factor a la desigualdad global. Nos preguntamos, por ejemplo, cuanta desigualdad puede atribuirse a las diferencias entre las Comunidades Autónomas en España. Como indica Shorrocks esto puede interpretarse de las dos maneras siguientes: i) ¿en cuánto se reduciría la desigualdad si las diferencias de renta entre las Comunidades Autónomas fueran las únicas que existieran? En el procedimiento tradicional la respuesta vendría dada por la diferencia entre la desigualdad total y la que se daría si la desigualdad dentro de cada Comunidad fuera nula pero se mantuvieran las diferencias en la renta media. En nuestro caso, para todos los valores de c, tal diferencia sería simplemente el término I_B.

Pero cabe también preguntar, ii) ¿en cuánto se reduciría la desigualdad total si se eliminaran las diferencias entre las Comunidades Autónomas, manteniéndose la desigualdad existente dentro de cada una de ellas? La respuesta podría darse sustrayendo de la desigualdad total la que se produciría si igualáramos la renta media de todas las Comunidades preservando la desigualdad existente dentro de cada una de ellas. Desgraciadamente, el resultado de esa operación no viene dado por I_B para todo c. Para los valores de c distintos de 0 ó 1, hemos visto que los coeficientes de ponderación variaban con I_B; y para $c = 1$, el cambio en la renta media de los subgrupos afectará también a la ponderación que reciba cada Comunidad individual. Luego *tan solo para* $c = 0$ la respuesta a ambas preguntas coincide y es igual a I_B.

Terminaremos este apartado indicando que la varianza de los logaritmos es descomponible en el siguiente sentido:

$$VL(x) = \sum_{i=1}^{m} (n^i/n)\, VL(x^i) + VL(\mu^{*1} e_{n_1}, \ldots, \mu^{*m} e_{n_m}),$$

donde μ^{*i} es la media geométrica de la distribución x^i. Así pues, en este caso, para calcular el término I_B se elimina la desigualdad dentro de cada subgrupo asignando a cada individuo la media geométrica del colectivo al que pertenece.

Obsérvese que las dos interpretaciones posibles del significado de I_B coinciden para la varianza de los logaritmos: el segundo término de la última expresión mide el grado de desigualdad si las diferencias en las medias geométricas de los subgrupos fueran la única fuente de desigualdad; pero mide también en cuanto se reduciría la desigualdad global si se mantuviera la desigualdad de cada subgrupo, pero se eliminaran las diferencias entre ellos por medio de transferencias que aseguraran la misma media geométrica para todos los miembros de la partición. La razón, claro está, es que para este indicador las ponderaciones asociadas a cada grupo dependen sólo de su importancia demográfica relativa.

APENDICE

La naturaleza de las propiedades de los índices de desigualdad estudiadas en el apartado anterior permite una clara distinción entre las propiedades normativas, que son además meramente ordinales, y la propiedad de la descomponibilidad que es de carácter cardinal. Entre las primeras, como todas las medidas de desigualdad que consideraremos satisfacen lo que denominamos la condición de simetría y el Principio de la población de Dalton, destacaremos las siguientes:

1. El Principio de las transferencias de Pigou-Dalton (que designaremos por *PTPD*), que asegura que ante una transferencia de renta desde un individuo a otro más pobre la desigualdad disminuye.

2. La sensibilidad ante transferencias en distintos tramos de la distribución, representada por el principio del decrecimiento del impacto de transferencias regresivas *(PDIT)*, o la versión más estricta del decrecimiento relativo de tal impacto *(PDRIT)*.

3. El tratamiento de los individuos a distintos niveles de desigualdad manteniendo la renta total constante, según la cual es netamente preferible que la FBS correspondiente *no* muestre lo que Blackorby y Donaldson denominan homoteticidad distributiva *(NHD)*, lo cual implica que, dada la renta total, a medida que la desigualdad aumenta se concede mayor importancia a la posición de los más pobres.

En cuanto a la propiedad de descomponibilidad ante particiones de la población, es importante tener en cuenta si los coeficientes de ponderación de la desigualdad experimentada dentro de cada subgrupo son o no independientes del procedimiento para hacer nulo el término I_B, es decir, el procedimiento para eliminar la desigualdad entre los subgrupos. Como vimos, la cuestión se reduce a si tales coeficientes vienen dados o no por la importancia demográfica relativa de los subgrupos (que denotaremos por n^j/n) dentro de la partición de que se trate.

Las medidas relativas de desigualdad que más se utilizan en la práctica pueden agruparse en tres clases bien diferenciadas:

a) Las medidas objetivas tradicionales, entre las que se cuentan:

— la *desviación relativa media*, que se define como la proporción que la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las rentas individuales y la media supone respecto de la renta total. Esto es, DRM: $D^n \to \mathbb{R}$, donde

$$\mathrm{DRM}\,(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|\right) \Big/ n\,\mu;$$

— el *coeficiente de variación*, CV: $D^n \to \mathbb{R}$, donde $CV(x) = \sigma/\mu$ y σ es la desviación típica de la distribución;

— la *varianza de los logaritmos*, VL: $D^n_+ \to \mathbb{R}$, donde

$$\mathrm{VL}\,(x) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\ln (x_i) - \ln (\mu^*)]^2$$

y μ^* es la media geométrica de la distribución, y

— el *índice de Gini*, que es el cociente de la media aritmética de los n^2 valores absolutos de las diferencias entre los pares de rentas sobre la cantidad 2μ, G: $D^n \to \mathbb{R}$, donde

$$G\,(x) = (1/2n^2\mu) \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_j|\right].$$

b) La familia de índices de Theil (11), T_c: $D^n \to \mathbb{R}$, donde

$$T_c\,(x) = \begin{cases} (1/n)\,[1/c\,(c-1)] \sum_{i=1}^{n} [(x_i/\mu)^c - 1] & c \neq 0, 1 \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} (x_i/\mu) \ln (x_i/\mu) & c = 1 \\ (1/n) \sum_{i=1}^{n} \ln (\mu/x_i) = \ln (\mu/\mu^*) & c = 0. \end{cases}$$

c) La familia de índices normativos de Atkinson, A_α : $D^n \to \mathbb{R}$, donde

$$A_\alpha\,(x) = \begin{cases} 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} (1/n)\,(x_i/\mu)^{1-\alpha}\right]^{(1/1-\alpha)} & \alpha > 0,\ \alpha \neq 1 \\ 1 - \prod_{i=1}^{n} (x_i/\mu)^{1/n} & \alpha = 1, \end{cases}$$

El resumen de las propiedades que satisfacen unos y otros se presenta en el siguiente

(11) Para $c = 1$ y $c = 0$ se obtienen los índices de desigualdad propuestos originalmente por Theil (1967) a partir de conceptos propios de la teoría de la información. Sobre la generalización a la familia de índices que aparece en este artículo véase, por ejemplo, Cowell (1977).

cuadro:

	Propiedades normativas				Descomponibilidad	
	PTPD	PDIT	PDRIT	NDH	$I=I_W+I_B$	$w^i=n^i/n$
DRM	No	No	No	?	No	—
CV	Si	No	No	No	No	—
VL	No	No	No	?	Si	Si
Gini	Si	No	No	No	No	—
T_c	Si	(1)	(2)	Si	Si	(3)
A_α	Si	Si	Si	Si	No	—

(1) Sólo para $c < 2$.
(2) Sólo para $c < 1$.
(3) Sólo para $c = 0$.

Esta información será útil para seleccionar el conjunto de indicadores que es interesante estimar en cada caso concreto, dependiendo de la naturaleza y los objetivos de la investigación empírica de que se trate.

BIBLIOGRAFIA

Arrow, K. (1977): «Extended sympathy and the possibility of social choice», *American Economic Review* núm. 67 (papers and proc.), págs. 219-25.

Atkinson, A. (1970): «On the measurement of inequality», *Journal of Economic Theory* núm. 2, págs. 244-263.

— y Bourguignon, F. (1982): «The comparison of multidimensioned distributions of economic status», *Review of Economic Studies* núm. 48, págs. 183-201.

— (1983): «Income distribution and differences in needs», *Social Science Research Council Programme on Taxation, Incentives and the Distribution of Income*, Working paper no. 48.

Blackorby, C. y Donaldson, D. (1978): «Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare», *Journal of Economic Theory* núm. 18, págs. 59-80.

Cowell, F. (1977): *Measuring inequality*, Philip Alan Publishers Limited.

Dalton, H. (1920): «The measurement of inequality of income», *Economic Journal* núm. 30, págs. 348-361.

Deaton, A. y Muellbauer, J. (1980): *Economics and consumer behavior*, Cambridge University Press.

Esteban, J. M. (1976*a*): «Social welfare functions and inequality measures», Working paper no. 76, *Departamento de Teoría Económica*, Universidad Autónoma de Barcelona.

— (1976*b*), «La medición de la desigualdad de rentas. Una visión escéptica de las contribuciones recientes», *Investigaciones Económicas*, págs. 43-65.

Foster, J. (1985): «Inequality measurement», en H. Peyton Young, ed., *Fair allocation*, American Mathematical Society, Proceedings of R. Butts y J. Hintikka, eds., *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Reidel.

Kolm, S. (1968): «The optimal production of social justice», en J. Margolis y H. Guitton, eds., *Public Economics*, MacMillan.

— (1973): «More equal distributions of bundless of commodities», *CEPREMAP*.

— (1976): «Unequal inequalities», *Journal of Economic Theory* núms. 12 y 13, págs. 416-422 y 82-111.

— (1977): «Multidimensional egalitarianisms», *Quarterly Journal of Economics* núm. 91, págs. 1-13.

Sen, A. (1973): *On economic inequality*, Oxford University Press.

— (1978): «Ethical measurement of inequality: some difficulties», en W. Krelle y A. Shorrocks, eds., *Personal income distribution*, North-Holland.

Shorrocks, A. (1980): «The class of additively decomposable inequality measurements», *Econometrica* núm. 48, págs. 613-625.

— (1984): «Inequality decomposition by population subgroups», *Econometrica* núm. 52, págs. 1369-1386.

Theil, H. (1967): *Economics and information theory*, North-Holland.

Zubiri, I.: (1985*a*): «Income inequality as a predictor of welfare inequality», *SEEDS*, D.P. 40, Instituto de Economía Pública, Universidad del País Vasco.

— (1985*b*): «Una introducción al problema de la medición de la desigualdad», *Hacienda Pública Española* núm. 95, págs. 291-317.